Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 43

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

26 de octubre de 2020

1. Calcular $\chi_-^\dagger \chi_-$.

Aunque Javier no ha pedido demostrar esto como ejercicio, me parece más completo incluirlo también. El vector χ_- se define como

$$\chi_- = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{1}$$

Por lo tanto el producto escalar viene dado por

$$\begin{aligned} \chi_-^\dagger \chi_- &= \begin{pmatrix} -e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \\ \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \left(-e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\right)\left(-e^{-i\phi}\sin\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\frac{\theta}{2} \\ &= \sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2} = 1 \end{aligned} \tag{2}$$

2. Calcular $\bar{u}_i u_j$ y $\bar{v}_i v_j$.

Vamos a definir

$$u_i = \begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} \\ \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i, \qquad v_i = \begin{pmatrix} \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2} \\ \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i \tag{3}$$

Donde $\epsilon_1 = +1$, $\epsilon_2 = -1$, $\chi_1 = \chi_+$ y $\chi_2 = \chi_-$. Y donde χ_- viene dado por la ecuación (1) y

$$\chi_+ = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{4}$$

Luego

$$\begin{aligned} \bar{u}_i u_j &= \left[\begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} & \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i^\dagger\right] \left[\sigma^3 \otimes 1\right] \left[\begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} \\ \epsilon_j \sinh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_j\right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} & \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i^\dagger\right] \left[\begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} \\ -\epsilon_j \sinh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_j\right] = \left(\cosh^2\frac{\eta}{2} - \epsilon_i\epsilon_j \sinh^2\frac{\eta}{2}\right) \cdot \chi_i^\dagger \chi_j \\ &= \left(\cosh^2\frac{\eta}{2} - \delta_{ij}\sinh^2\frac{\eta}{2}\right) \cdot \delta_{ij} = \left(\cosh^2\frac{\eta}{2} - \sinh^2\frac{\eta}{2}\right) \cdot \delta_{ij} = \delta_{ij} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{v}_i v_j &= \left[\begin{pmatrix} \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i^\dagger\right] \left[\sigma^3 \otimes 1\right] \left[\begin{pmatrix} \epsilon_j \sinh\frac{\eta}{2} \\ \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_j\right] \\ &= \left[\begin{pmatrix} \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i^\dagger\right] \left[\begin{pmatrix} \epsilon_j \sinh\frac{\eta}{2} \\ -\cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_j\right] = \left(\epsilon_i\epsilon_j \sinh^2\frac{\eta}{2} - \cosh^2\frac{\eta}{2}\right) \cdot \chi_i^\dagger \chi_j \\ &= \left(\delta_{ij}\sinh^2\frac{\eta}{2} - \cosh^2\frac{\eta}{2}\right) \cdot \delta_{ij} = \left(\sinh^2\frac{\eta}{2} - \cosh^2\frac{\eta}{2}\right) \cdot \delta_{ij} = -\delta_{ij} \end{aligned}$$

Obteniendo el resultado

$$\boxed{\bar{u}_i u_j = \delta_{ij}, \qquad \bar{v}_i v_j = -\delta_{ij}} \tag{5}$$

De nuevo, aunque Javier no lo pide explícitamente, vamos a calcular $\bar{u}_i v_j$ y $\bar{v}_i u_j$, por completitud.

$$\begin{aligned}
\bar{u}_i v_j &= \left[\begin{pmatrix}\cosh\frac{\eta}{2} & \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes \chi_i^\dagger\right]\left[\sigma^3\otimes 1\right]\left[\begin{pmatrix}\epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2}\\ \cosh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes\chi_j\right]\\
&= \left[\begin{pmatrix}\cosh\frac{\eta}{2} & \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes \chi_i^\dagger\right]\left[\begin{pmatrix}\epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2}\\ -\cosh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes\chi_j\right] = \left(\epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2} - \epsilon_i\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\right)\cdot\chi_i^\dagger\chi_j\\
&= (\epsilon_j-\epsilon_i)\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\delta_{ij} = (\epsilon_i-\epsilon_i)\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\delta_{ij} = 0
\end{aligned}$$

Y finalmente

$$\bar{v}_i u_j = v_i^\dagger\gamma^0 u_j = \left(u_j^\dagger\gamma^0 v_i\right)^\dagger = (\bar{u}_j v_i)^\dagger = 0$$

donde tenemos que recordar que $(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0$

3. Calcular $u_i^\dagger u_j$, $v_i^\dagger v_j$ y $u_i^\dagger v_j$.

Haciendo unos cálculos muy similares al caso anterior

$$\begin{aligned}
u_i^\dagger u_j &= \left[\begin{pmatrix}\cosh\frac{\eta}{2} & \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes \chi_i^\dagger\right]\left[\begin{pmatrix}\cosh\frac{\eta}{2}\\ \epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes\chi_j\right] = \left(\cosh^2\frac{\eta}{2}+\epsilon_i\epsilon_j\sinh^2\frac{\eta}{2}\right)\cdot\chi_i^\dagger\chi_j\\
&= \left(\cosh^2\frac{\eta}{2}+\delta_{ij}\sinh^2\frac{\eta}{2}\right)\cdot\delta_{ij} = \left(\cosh^2\frac{\eta}{2}+\sinh^2\frac{\eta}{2}\right)\cdot\delta_{ij} = \delta_{ij}\cosh\eta = \frac{E}{mc}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Donde se usa la relación trigonométrica $\cosh^2\frac{\eta}{2}+\sinh^2\frac{\eta}{2} = \cosh\eta = \frac{E}{mc}$. El otro caso es similar

$$\begin{aligned}
v_i^\dagger v_j &= \left[\begin{pmatrix}\epsilon_i\sinh\frac{\eta}{2} & \cosh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes \chi_i^\dagger\right]\left[\begin{pmatrix}\epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2}\\ \cosh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes\chi_j\right]\\
&= \left(\epsilon_i\epsilon_j\sinh^2\frac{\eta}{2}+\cosh^2\frac{\eta}{2}\right)\cdot\chi_i^\dagger\chi_j = u_i^\dagger u_j = \frac{E}{mc}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Finalmente los casos que faltan

$$\begin{aligned}
u_i^\dagger v_j &= \left[\begin{pmatrix}\cosh\frac{\eta}{2} & \epsilon_i \sinh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes \chi_i^\dagger\right]\left[\begin{pmatrix}\epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2}\\ \cosh\frac{\eta}{2}\end{pmatrix}\otimes\chi_j\right] = \left(\epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}+\epsilon_i\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\right)\cdot\chi_i^\dagger\chi_j\\
&= (\epsilon_j+\epsilon_i)\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\delta_{ij} = \frac{\epsilon_i+\epsilon_i}{2}\sinh\eta\delta_{ij} = \epsilon_i\delta_{ij}\sinh\eta = \epsilon_i\frac{|\mathbf{p}|}{mc}\delta_{ij}
\end{aligned}$$

Donde usamos la identidad $)\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2} = \frac{\sinh\eta}{2}$ y $\sinh\eta = \frac{|\mathbf{p}|}{mc}$. Encontrando un resultado distinto al propuesto por Javier en el minuto 22:20.

$$v_i^\dagger u_j = \left(u_j^\dagger v_i\right)^\dagger = \left(\frac{|\mathbf{p}|}{mc}\epsilon_i\delta_{ij}\right)^\dagger = \epsilon_i\frac{|\mathbf{p}|}{mc}\delta_{ij}$$

4. Calcular $u_i^\dagger(-\mathbf{p})v_j(\mathbf{p})$ y $v_i^\dagger(\mathbf{p})u_j(-\mathbf{p})$.

Recordemos que todos los resultados hasta ahora eran válidos para el vector $\mathbf{p}$ definido como

$$p^0 = mc\cosh\eta, \qquad p^1 = mc\sinh\eta\sin\theta\cos\phi, \qquad p^2 = mc\sinh\eta\sin\theta\sin\phi, \qquad p^3 = mc\sinh\eta\cos\theta$$

Al hacer el cambio $p^0 \to p^0$ y $p^i \to -p^i$ podemos podemos interpretarlo de dos formas, tal y como lo hace Javier haciendo el cambio $\eta \to -\eta$ o, también es posible manteniendo el mismo valor de η y hacer los cambios $\theta \to \pi - \theta$, $\phi \to \pi + \phi$. Esto podemos verlo pues las funciones seno y coseno cumplen que

$$\sin(\pi \pm x) = \mp \sin x, \qquad \cos(\pi \pm x) = -\cos x$$

Hay dos razones por las que voy a usar la segunda opción. En primer lugar, porqué matemáticamente son equivalentes y por lo tanto ambas deben dar el mismo resultado, Javier ha usado la primera en su vídeo, así que voy a usar la segunda para comprobar que en efecto obtenemos el resultado deseado.

La segunda razón es más sobre la interpretación física, y es que al hacer el cambio $\eta \to -\eta$ no estamos modificando los estados $\chi_\pm$, estos dos estados los habíamos definido como espín paralelo a $\mathbf{p}$ y espín anti-paralelo a $\mathbf{p}$. Entonces, para un electrón moviéndose con momento $\mathbf{p}$, eso significa que χ_+ es espín paralelo al movimiento mientras que χ_- es anti-paralelo al movimiento. Pero, por lo tanto, para un electrón moviéndose con momento $-\mathbf{p}$ es al revés; χ_- representa el estado con espín paralelo al movimiento y χ_+ espín anti-paralelo al movimiento.

Por otro lado, al modificar los valores de θ, ϕ dejando η igual, sí que modificamos los estados $\chi_\pm$, manteniendo que χ_+ siempre va a ser paralelo al movimiento y χ_- anti-paralelo. Vamos a ver esto matemáticamente:

$$\chi_+(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi-\theta}{2} \\ e^{i(\phi+\pi)}\sin\frac{\pi-\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = -e^{i\phi}\chi_-(\mathbf{p})$$

$$\chi_-(-\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} -e^{-i(\phi+\pi)}\sin\frac{\pi-\theta}{2} \\ \cos\frac{\pi-\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = e^{-i\phi}\chi_+(\mathbf{p})$$

Donde se ha usado las relaciones que $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$, $e^{i\pi} = e^{-i\pi} = -1$. Como se puede ver, al cambiar los ángulos θ, ϕ el estado χ_+ y χ_- se intercambian, lo cual tiene sentido, pues lo que antes era paralelo al movimiento, ahora será anti-paralelo y viceversa.

Ahora podemos proceder al cálculo que nos interesa

$$\begin{aligned} u_i^\dagger(-\mathbf{p})v_j(\mathbf{p}) &= \left[\begin{pmatrix} \cosh\frac{\eta}{2} & \epsilon_i\sinh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_i^\dagger(-\mathbf{p})\right]\left[\begin{pmatrix} \epsilon_j\sinh\frac{\eta}{2} \\ \cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \chi_j(\mathbf{p})\right] \\ &= (\epsilon_j + \epsilon_i)\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2}\chi_i^\dagger(-\mathbf{p})\chi_j(\mathbf{p}) = \frac{\epsilon_i + \epsilon_j}{2}\sinh\eta\,\chi_i^\dagger(-\mathbf{p})\chi_j(\mathbf{p}) \end{aligned} \tag{6}$$

Necesitamos una expresión para $\chi_i^\dagger(-\mathbf{p})\chi_j(\mathbf{p})$ así que vamos a explorar caso por caso

$$\chi_1^\dagger(-\mathbf{p})\chi_1(\mathbf{p}) = -e^{-i\phi}\chi_2^\dagger(\mathbf{p})\chi_1(\mathbf{p}) = -e^{-i\phi}\delta_{21} = 0$$

$$\chi_1^\dagger(-\mathbf{p})\chi_2(\mathbf{p}) = -e^{-i\phi}\chi_2^\dagger(\mathbf{p})\chi_2(\mathbf{p}) = -e^{-i\phi}\delta_{22} = -e^{-i\phi} = e^{-i(\phi+\pi)}$$

$$\chi_2^\dagger(-\mathbf{p})\chi_1(\mathbf{p}) = e^{i\phi}\chi_1^\dagger(\mathbf{p})\chi_1(\mathbf{p}) = e^{i\phi}\delta_{11} = e^{i\phi}$$

$$\chi_2^\dagger(-\mathbf{p})\chi_2(\mathbf{p}) = e^{i\phi}\chi_1^\dagger(\mathbf{p})\chi_2(\mathbf{p}) = e^{i\phi}\delta_{12} = 0$$

Que podemos expresar como

$$\chi_i^\dagger(-\mathbf{p})\chi_j(\mathbf{p}) = e^{i\phi_i}(1 - \delta_{ij}) \tag{7}$$

Donde $\phi_1 = -(\phi + \pi)$ y $\phi_2 = \phi$. Sustituyendo en (6) obtenemos

$$u_i^\dagger(-\mathbf{p})v_j(\mathbf{p}) = (\epsilon_j + \epsilon_i)(1 - \delta_{ij})\frac{\sinh\eta}{2}e^{i\phi_i} = 0$$

Esto es cero, porque si $i = j$ entonces $(1 - \delta_{ij}) = 0$, pero si $i \neq j$ entonces $\epsilon_i + \epsilon_j = 0$. Por otra parte

$$v_i^\dagger(-\mathbf{p})u_j(\mathbf{p}) = (u_j^\dagger(\mathbf{p})v_i(-\mathbf{p}))^\dagger = 0 \tag{8}$$

5. Calcular $\sum v_i(\mathbf{p})\bar{v}_i(\mathbf{p})$

Javier ya nos ha mostrado una forma de calcular esto con el ejemplo de las u, vamos ahora a ver una demostración alternativa (aunque esencialmente es la misma). Vamos a empezar calculando la suma para $\mathbf{p} = 0$ Para eso recordemos:

$$v_1(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y por lo tanto, considerando que $\gamma^0 = \sigma^3 \otimes 1$

$$\bar{v}_1(0) = v_1^\dagger \gamma^0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\right][\sigma^3 \otimes 1] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\bar{v}_2(0) = v_2^\dagger \gamma^0 = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}\right][\sigma^3 \otimes 1] = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\sum v_i(\mathbf{0})\bar{v}_i(\mathbf{0}) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes 1\end{aligned}$$

Ahora simplemente hagamos una transformación de Lorentz, recordemos que ésta viene dada por

$$v_i(\mathbf{p}) = S[\Lambda]v_i(0) \Longrightarrow \bar{v}_i(\mathbf{p}) = v_i^\dagger(\mathbf{0})S^\dagger\gamma^0 = \bar{v}_i(0)\gamma^0 S^\dagger \gamma^0$$

Y por lo tanto

$$\sum_i v_i(\mathbf{p})\bar{v}_i(\mathbf{p}) = S\left(\sum_i v_i(0)\bar{v}_i(0)\right)\gamma^0 S^\dagger \gamma^0$$

Donde

$$S = \cosh\frac{\eta}{2} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{+i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & e^{+i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} + \sinh\frac{\eta}{2}\sigma^1 \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{+i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & -e^{+i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{9}$$

Y por lo tanto, para calcular $\gamma^0 S^\dagger \gamma^0$ tenemos que calcular los siguiente productos:

$$\sigma^3\sigma^3 = 1, \qquad \sigma^3\sigma^1\sigma^3 = \sigma^3(2\delta^{13} - \sigma^3\sigma^1) = -\sigma^3\sigma^3\sigma^1 = -\sigma^1$$

Donde se ha usado la propiedad $\left\{\sigma^i, \sigma^j\right\} = 2\delta^{ij}$ Y por lo tanto

$$[\sigma^3 \otimes 1]S^\dagger[\sigma^3 \otimes 1] = \cosh\frac{\eta}{2} \otimes \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ -e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \sinh\frac{\eta}{2}\sigma^1 \otimes \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Por otra parte, tenemos

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \sigma^1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que el producto $S' = S\left(\sum_i v_i(0)\bar{v}_i(0)\right)$ queda

$$S' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\cosh\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & -e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{+i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & e^{+i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & \sinh\frac{\eta}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} & e^{-i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{+i\frac{\phi}{2}}\sin\frac{\theta}{2} & -e^{+i\frac{\phi}{2}}\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Finalmente, multiplicando las ecuaciones (11) y (10) obtenemos cuatro términos:

$$
\begin{aligned}
\sum_i v_i(\mathbf{p})\bar{v}_i(\mathbf{p}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\cosh^2\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} & 2e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ 2e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & -\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} & 2e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ 2e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} \sinh^2\frac{\eta}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \cos^2\frac{\theta}{2} + \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sinh^2\frac{\eta}{2} & 0 \\ 0 & -\cosh^2\frac{\eta}{2} \end{pmatrix} \otimes 1 \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & -\sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2} \\ \sinh\frac{\eta}{2}\cosh\frac{\eta}{2} & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} - \sin^2\frac{\theta}{2} & 2e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ 2e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} - \cos^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cosh\eta - 1 & 0 \\ 0 & -\cosh\eta - 1 \end{pmatrix} \otimes 1 \\
&+ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -\sinh\eta \\ \sinh\eta & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta(\cos\phi - i\sin\phi) \\ \sin\theta(\cos\phi + i\sin\phi) & -\cos\theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\Big(\cosh\eta[\sigma^3 \otimes 1] - [1 \otimes 1] - \sinh\eta\sin\theta\cos\phi[i\sigma^2 \otimes \sigma^1] \\
&- \sinh\eta\sin\theta\sin\phi[i\sigma^2 \otimes \sigma^2] - \sinh\eta\cos\theta[i\sigma^2 \otimes \sigma^3]\Big) \\
&= \frac{1}{2mc}\Big(p_0\gamma^0 - mc + p_1\gamma^1 p_2\gamma^2 + p_3\gamma^3\Big) = \frac{p_\mu\gamma^\mu - mc}{2mc}
\end{aligned}
$$

Donde se ha usado que $\gamma^0 = \sigma^3 \otimes 1$ y $\gamma^i = i\sigma^2 \otimes \sigma^i$ y que $p_0 = mc\cosh\eta$, $p_1 = -mc\sinh\eta\sin\theta\cos\phi$, $p_2 = -mc\sinh\eta\sin\theta\sin\phi$, $p_3 = mc\sinh\eta\cos\theta$. Obteniendo así el resultado deseado.